

Ein neuer Netzbewegungslöser für große Verformungen basierend auf der Centroidal-Voronoi-Tessellierung

vorgelegt von

M.Sc.

Witalij Wambold

geb. in Wladimir

Von der Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen
Universität Berlin zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Naturwissenschaften

- Dr. rer. nat. -

genehmigte Dissertation

Promotionsausschuss:

Vorsitzender:	Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Pinkall
Berichter/Gutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Günter Bärwolff
Berichter/Gutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Volker Mehrmann
Berichter/Gutachter:	Dr. rer. nat. Andreas Gitt-Gehrke

Tag der wissenschaftlichen Aussprache:

Berlin 01.08.2016

Berichte aus der Mathematik

Witalij Wambold

**Ein neuer Netzbewegungslöser für
große Verformungen basierend auf
der Centroidal-Voronoi-Tessellierung**

Strömungen in zeitabhängigen Gebieten

D 83 (Diss. TU Berlin)

Shaker Verlag
Aachen 2017

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Zugl.: Berlin, Techn. Univ., Diss., 2016

Die Ergebnisse, Meinungen und Schlüsse dieser Dissertation sind nicht notwendigerweise die der Volkswagen AG.

Copyright Shaker Verlag 2017

Alle Rechte, auch das des auszugsweisen Nachdruckes, der auszugsweisen oder vollständigen Wiedergabe, der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen und der Übersetzung, vorbehalten.

Printed in Germany.

ISBN 978-3-8440-5061-5

ISSN 0945-0882

Shaker Verlag GmbH • Postfach 101818 • 52018 Aachen

Telefon: 02407 / 95 96 - 0 • Telefax: 02407 / 95 96 - 9

Internet: www.shaker.de • E-Mail: info@shaker.de

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem Ansatz zur Simulation der Strömungen in zeitabhängigen Gebieten. Der integrale Teil der Arbeit besteht dabei in der Entwicklung einer Methode zur Bewegung von sogenannten Centroidal-Voronoi-Diagrammen zusammen mit ihren Definitionsgebieten. Ein großer Vorteil des entwickelten Algorithmus besteht in ständiger Erhaltung der Gitterqualität bei unbeschränkt großen Verformungen des darunterliegenden Rechengebietes. Ein weiterer Vorteil dieser Methode besteht darin, dass die Anzahl der Volumenelemente während der ganzen transienten Simulation konstant bleibt, womit Interpolation solcher Strömungskenngrößen wie Druck und Geschwindigkeit vermieden wird.

Zunächst werden Grundlagen und vier klassische Ansätze zur Konstruktion der Voronoi-Diagramme von nicht abgeschlossenen bzw. offenen Gebieten beschrieben. Danach wird ein im Rahmen dieser Arbeit entwickelter Algorithmus zur schnellen Aktualisierung des Voronoi-Diagramms eines Quaders vorgestellt, der das Rechengebiet komplett umhüllt. Ein weiterer Teil der Arbeit befasst sich mit Berücksichtigung nicht konvexer Strukturen des vordefinierten Gebietes. Wir verwenden eine zusätzliche triangulierte Fläche als Repräsentation des Gebietsrandes. Solche kritische Strukturen wie scharfe Kanten bzw. spitze Ecken werden in dem endgültigen Volumengitter abgebildet.

Im nachfolgenden und größten Teil dieser Arbeit wird gezeigt, wie die Centroidal-Voronoi-Diagramme dafür genutzt werden können, um sowohl eine Art Gitterbewegung herzustellen, als auch die Qualität der bewegenden Gitter aufrecht zu erhalten. Die Idee dieses Ansatz ist, dass man die zeitlich aufgelöste Simulation mit einem Centroidal-Voronoi-Gitter startet und nach jeder Randdeformation die Centroidal-Voronoi-Eigenschaft des darunterliegenden Gitters wiederherstellt. Danach werden die Algorithmen beschrieben, die zur Konstruktion der Centroidal-Voronoi-Diagramme verwendet werden. In diesem Kontext wird auch ein im Rahmen dieser Arbeit entstandener Algorithmus vorgestellt, der sowohl effizienter als die in [61] beschriebene Methode ist, als auch eine wesentlich höhere Konvergenzrate gegenüber dem klassischen Lloyd-Algorithmus hat. Mittels experimenteller Untersuchungen werden in diesem Teil der notwendige Genauigkeitsgrad der zur Approximation der Volumenintegrale verwendeten Quadraturformeln bestimmt und die Konvergenzrate des Lloyd-Algorithmus untersucht.

Ein weiterer Teil der Arbeit ist der Verwendbarkeit des entwickelten Algorithmus mit der Finite-Volume-Methode gewidmet. Hierdurch werden die sogenannten Navier-Stokes-Gleichungen in ALE-Formulierung sowie die geometrischen Erhaltungsgleichungen hergeleitet. Danach wird ein Algorithmus angeboten, mit dessen Hilfe die sogenannten Netzflüsse (Engl. *mesh fluxes*) so berechnet werden, dass der geometrische Erhaltungssatz erfüllt ist. Denn aufgrund der Neuerzeugung der Flächenelemente ist es unmöglich mithilfe der Verschiebung der Knoten dieser Elemente die Netzflüsse zu bestimmen, wie es auch bei den klassischen Ansätzen gemacht wird (siehe [28]).

Im Anschluss wird der Gesamtalgorithmus anhand einer relativ komplizierten Geometrie des Propellers in einem inkompressiblen Fluid validiert.

Abstract

The present work deals with an approach concerning the simulation of flows in time-dependent domains. The integral part of the work consists in developing of a method for motion of the so-called centroidal Voronoi diagrams together with their definition areas. A great advantage of the developed algorithm is constantly maintaining the grid quality in the case of unlimited deformations of the underlying computational domain. Another advantage of this method is that the number of cells remains constant during the entire transient simulation, whereby interpolation of such flow fields as pressure and velocity is avoided.

First, the theoretical background and four classical approaches for construction of Voronoi diagrams of open domains are described. Afterwards, an algorithm developed in this work for fast update of a Voronoi diagram of a cuboid completely enveloping the computational domain will be presented. Another part of the work is concerned with non-convex structures of the predefined domain. We use an additional triangulated surface as a representation of the boundary. Such critical structures such as sharp edges or pointed corners are represented in the final volume mesh.

In the following and the largest part of this work is shown, how the centroidal Voronoi diagrams can be used, in order to move the internal mesh and to maintain the high quality of the moved mesh. The idea of this approach is that the transient simulation is started with a centroidal Voronoi mesh and the centroidal Voronoi property of the underlying mesh is restored after each deformation of the domain boundary. Thereafter, the algorithms are described, which are used for construction of the centroidal Voronoi diagrams. In this context an algorithm arising within the scope of this work is presented, which is more efficient than the in [61] described method, and has a significantly higher convergence rate than the classic Lloyd's method. By means of experimental studies the necessary degree of precision of quadrature rules is determined, which is used for approximation of the volume integrals. Furthermore the convergence rate of the Lloyd algorithm is examined.

Another part of the work is dedicated to the applicability of the developed algorithm to the finite volume method. As a result, the so-called Navier-Stokes equations in ALE formulation as well as the geometric conservation laws are derived. Then an algorithm is offered allowing such calculation of the mesh fluxes so that the geometric conservation law is satisfied. Because of the regeneration of the faces, it is impossible to use the displacement of the face nodes, in order to compute the mesh fluxes (see [28]).

Finally, the whole algorithm will be validated using a relatively complicated geometry of the propeller immersed in an incompressible flow.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Stand der Wissenschaft	2
1.3	Wissenschaftlicher Beitrag	3
1.4	Kapitelübersicht	5
2	Voronoi-Diagramme nicht konvexer Gebiete	7
2.1	Theoretische Hintergründe	7
2.1.1	Voronoi-Diagramme	7
2.1.2	Delaunay-Triangulierung, Dualität und Entartung	9
2.1.3	Klassische Methoden zur Voronoi- bzw. Delaunay-Zerlegung	10
2.2	Voronoi-Zerlegung des einhüllenden Quaders	12
2.2.1	Verschneiden mit Bisektoren	13
2.2.2	Bestimmung der nächsten Nachbarn	14
2.3	Verschneiden mit dem Randgitter	16
2.3.1	Überblick über den Algorithmus	17
2.3.2	Feature-Edge-Struktur	18
2.3.3	Randgitter	22
2.4	Konstruktion globaler Voronoi-Knoten	24
2.5	Problematik der Randelemente	25
3	Gitterbewegung mithilfe von CVT	29
3.1	Der Begriff Centroidal-Voronoi-Tessellierung	29
3.2	Globale Optimalität von CVT	30
3.2.1	CVT als Gradient der Fehlerfunktion	30
3.2.2	Normierte Trägheit und Ideales Polyeder	35
3.2.3	Definition der Zelldichte	37
3.3	Lloyd-Algorithmus	40
3.4	Alternativer Lloyd-Newton-Algorithmus	42
3.5	Auswertung der mehrfachen Integrale	46
3.5.1	Volumenintegrale	46
3.5.2	Flächenintegrale	53
3.6	Konvergenz	54
3.6.1	Konvergenzrate beim Lloyd-Algorithmus	55
3.6.2	Konvergenzrate beim alternativen Lloyd-Newton-Algorithmus	60
3.7	Wodurch entsteht Gitterbewegung?	63
3.7.1	Vorbereiten des initialen Netzes zur Strömungssimulation	65
3.7.2	Optimierung der Randzellen mithilfe von CCVT	67
3.7.3	Randbedingungen zur Verschiebung der Generatoren	69

3.8 Wahl der Quadraturformeln zur Auswertung der Volumen- bzw. der Flächenintegrale	70
4 Nutzung des Verfahrens mit der FVM	73
4.1 Lagrangesche und Eulersche Darstellung	73
4.2 Erhaltungssätze der Strömungsmechanik	74
4.2.1 Massenerhaltung	74
4.2.2 Impulserhaltung	75
4.3 Navier-Stokes-Gleichungen	76
4.4 Arbitrary-Lagrange-Euler-Formulierung	77
4.5 Geometrische Erhaltungssätze	78
4.6 Diskretisierung von Differentialoperatoren	79
4.6.1 Zeitdiskretisierung	80
4.6.2 Ortsdiskretisierung mittels der Finite-Volumen-Methode	83
4.6.3 SIMPLE-Algorithmus für die FVM	86
4.6.4 Gitterqualitätskriterien im Bezug auf die FVM	90
4.6.5 Motivation zur Verwendung der Centroidal-Voronoi-Gitter	91
4.7 Berechnung der zulässigen Netzflüsse	92
4.7.1 Korrektur der geschätzten Netzflüsse	92
4.7.2 Eine gute Näherung der Netzflüsse	98
4.8 Verteilung der Zelldichte bzw. der Kantenlänge	102
5 Validierung in OpenFOAM	105
5.1 Integration in OpenFOAM	105
5.2 Propeller im Wasser	105
6 Fazit und Ausblick	121
Literaturverzeichnis	122